Прыгучий шарик

В.МАЙЕР

Широко известен опыт, в котором два лежащих друг на друге шарика одновременно падают на твердую поверхность, при этом после удара верхний шарик меньшей массы подскакивает на высоту, превышающую ту, с которой он начал падать. Рассмотрим теорию этого явления в системах отсчета, связанных с поверхностью Земли и со свободно падающим в поле тяжести Земли массивным шариком.

Мы привыкли систему отсчета, связанную с поверхностью Земли, считать *инерциальной* и все механические задачи решать именно в этой системе отсчета. На самом деле, безупречно доказать инерциальность какой бы то ни было системы отсчета невозможно, а систему отсчета, связанную с Землей, можно считать инерциальной лишь с известной степенью приближения.

Мы уверенно называем *неинерциальной* систему отсчета, связанную со свободно падающим в поле тяжести Земли телом и, следовательно, движущуюся относительно нее с ускорением свободного падения. (В действительности, как раз такая система отсчета, если она ограничена небольшими размерами, и является инерциальной, точнее – локально инерциальной. Но это – разговор особый.)

Попробуем показать, насколько эффективно бывает использование неинерциальной системы отсчета, связанной со свободно падающим телом.

Эксперимент. Возьмите каучуковый шарик диаметром 30–50 мм и шарик для пинг-понга. В каучуковом шарике сверлом сделайте углубление и вставьте в него полиэтиленовый стержень от шариковой ручки. В шарике для пинг-понга просверлите диаметральные отверстия диаметром на 2–3 мм больше, чем диаметр стержня. Вместо пинг-понгового шарика можно использовать второй каучуковый шарик, масса которого значительно меньше массы первого; в таком случае в нем нужно просверлить сквозное отверстие. Наденьте шарик для пинг-понга на стержень и обрежьте стержень так, чтобы удобно было брать его пальцами (рис.1).

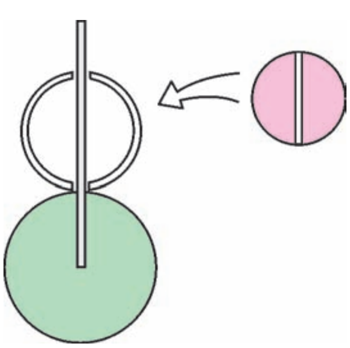

Рис. 1

Теперь – опыты. С высоты 10–20 см на твердую массивную столешницу отпустите снятый со стержня пинг-понговый шарик. Он отскочит и поднимется почти на ту же высоту, с которой падал. Возьмите за стержень каучуковый шарик и отпустите его с той же высоты, что и шарик для пинг-понга, – он отскочит и поднимется почти до той же высоты, с которой падал. Результаты этих опытов очевидны: шарики испытывают близкое к упругому соударение с поверхностью стола, поэтому энергии почти не теряют и подскакивают на высоту, лишь чуть-чуть меньшую той, с которой падали.

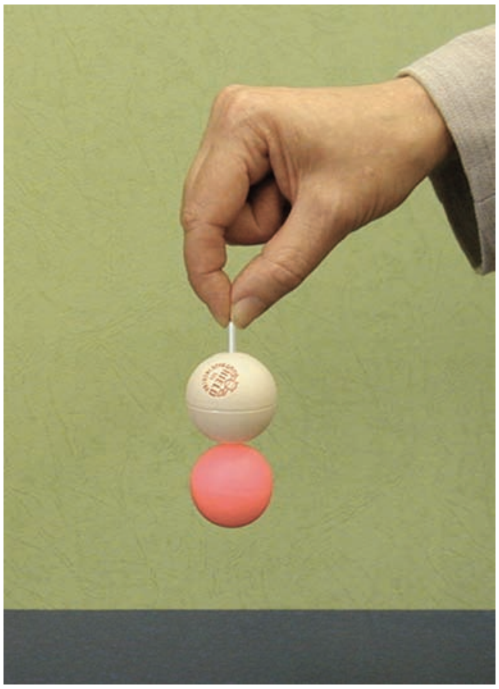

Рис. 2

Снова наденьте шарик для пинг-понга на стержень, возьмите выступающий конец стержня пальцами и отпустите оба шарика с той же высоты, что и раньше (рис.2). Вы с изумлением обнаружите, что пинг-понговый шарик при этом подскакивает на значительно бóльшую высоту, чем раньше!

В чем дело? Неужели легкий шарик приобретает откуда-то дополнительную энергию? Давайте разберемся.

Явление в системе отсчета, связанной с поверхностью Земли. Шарики разной массы, практически не взаимодействуя друг с другом, подлетают с одной и той же скоростью $\vec{v}$ к твердой горизонтальной поверхности (рис.3). Первый

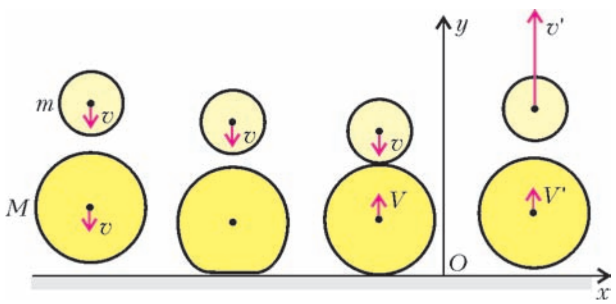

Рис. 3

(нижний) шарик, ударившись о поверхность, деформируется и на мгновение останавливается. Считая удар упругим, получаем, что после удара массивный шарик отскакивает со скоростью $\vec{V}$, по модулю равной скорости $\vec{v}$, которой он обладал в начале удара: $V = v$. В этот момент легкий шарик все еще продолжает падать вниз с прежней скоростью $\vec{v}$.

Таким образом, в нашей модели упруго взаимодействуют два шарика с массами M и m, движущиеся навстречу друг другу со скоростями $\vec{V}$ и $\vec{v}$ соответственно. Обозначим скорости первого и второго шариков после их соударения $\vec{V}'$ и $\vec{v}'$ соответственно. По закону сохранения импульса система тел после взаимодействия имеет тот же импульс, что и до взаимодействия:

$$M\vec{V}+m\vec{v}=M\vec{V}'+m\vec{v}'.$$

Переходя от векторов к их проекциям на вертикальную ось Oy, получаем

$$(M-m)v=MV'+mv'$$

(здесь индексы y у проекций скоростей опущены). Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{MV^2}{2}+\frac{mv^2}{2}=\frac{MV'^2}{2}+\frac{mv'^2}{2},$$

или, учитывая, что $V=v$,

$$(M+m)v^2=MV'^2+mv'^2.$$

Исключим из формул скорость V'. Для этого выразим эту скорость из закона сохранения импульса:

$$V'=\frac{(M-m)v-mv'}{M}=v-\frac{m}{M}(v+v')$$

и возведем ее в квадрат:

$$V'^2=v^2-2\frac{m}{M}(v+v')v+\frac{m^2}{M^2}(v+v')^2.$$

Масса шарика для пинг-понга значительно меньше массы каучукового шарика, поэтому членом, содержащим m^2/M^2, можно пренебречь по сравнению с остальными членами последней формулы. Тогда, подставляя значение V'^2 в закон сохранения энергии, получаем

$$(M+m)v^2=Mv^2-2m(v+v')v+mv'^2,$$

или

$$3v^2=-2vv'+v'^2.$$

Добавив слева и справа в последнем равенстве по v^2, находим

$$4v^2=(v-v')^2, \text{ или } 2v=v'-v.$$

Таким образом, приходим к заключению, что скорость шарика меньшей массы после соударения в три раза больше скорости этого шарика до соударения:

$$v'=3v.$$

Кинетическая энергия тела, упавшего с высоты h, равна начальной потенциальной энергии: $mv^2/2=mgh$. Аналогичное равенство можно записать для тела, поднявшегося на высоту h' после удара о столешницу: $mv'^2/2=mgh'$. Тогда окончательно получаем, что высота, на которую подскакивает легкий шарик, в 9 раз больше высоты, с которой он падает:

$$\frac{h'}{h}=\frac{v'^2}{v^2}=9.$$

Конечно, такого большого подскока мы не увидим. Во-первых, потому – не будем забывать этого – что наш результат приближенный, так как при выводе мы допустили упрощения. Во-вторых, потому что удары, конечно, далеко не упругие.

Большего эффекта можно добиться, если вместо рекомендованных выше шариков взять стальные: один диаметром 30–50 мм, а второй диаметром 5–10 мм. В этом случае высота подскока маленького шарика будет приближаться к вычисленному значению. Однако сам опыт, как нетрудно сообразить, станет гораздо более капризным.

Явление в системе отсчета, связанной со свободно падающим шариком. Вначале еще раз напомним, как происходит явление в системе отсчета xOy, связанной с поверхностью Земли. Для удобства векторы скоростей, совпадающие по направлению с осью y, будем считать положительными, а противоположные ей – отрицательными.

Подлетая к поверхности стола, шарики имеют одинаковые скорости $-v$ (рис.4,*а*). При ударе нижнего шарика о стол он испытывает упругое соударение и отскакивает вверх со

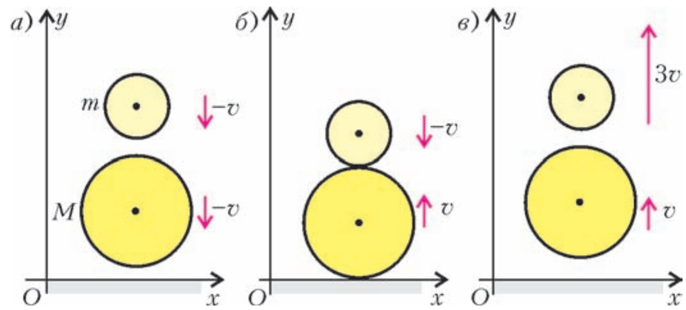

Рис. 4

скоростью v, а верхний шарик в этот момент продолжает двигаться со скоростью $-v$ относительно стола (рис.4,*б*). Далее верхний шарик сталкивается с движущимся навстречу ему нижним. Проведенный выше расчет показывает, что если считать это соударение упругим, а массу нижнего шарика существенно превышающей массу верхнего, то после соударения верхний шарик приобретает скорость, примерно равную $3v$ (рис.4,*в*).

Теперь это же явление рассмотрим в системе отсчета $x'O'y'$, связанной с нижним шариком. Подлетая к столу, оба шарика в этой системе отсчета имеют нулевую скорость, а стол движется навстречу им со скоростью v (рис.5,*а*). После упругого удара стола по нижнему шарику стол получает скорость $-v$, а верхний шарик, который продолжает двигаться относительно стола со скоростью $-v$, приобретает

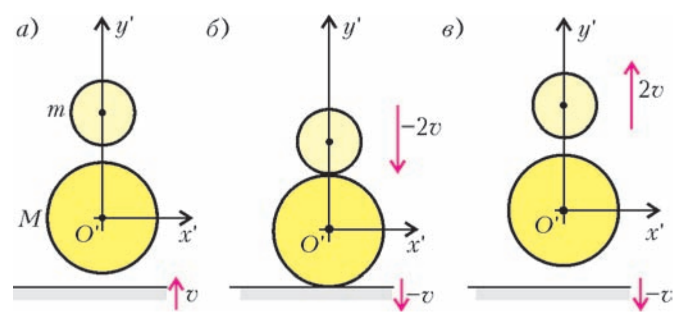

Рис. 5

скорость $-2v$ (рис.5,*б*). С этой скоростью он налетает на массивный нижний шарик и после упругого соударения с ним получает скорость, примерно равную $2v$, если $m \ll M$ (рис.5,*в*). Значит, относительно стола, который движется со скоростью $-v$, верхний шарик после удара начнет двигаться со скоростью приблизительно $3v$ и подскочит на высоту, примерно в 9 раз превышающую ту, с которой он начал падать. Именно это и требовалось доказать.

Заметим, что решение нашей задачи в неинерциальной системе отсчета, связанной со свободно падающим шариком, оказалось гораздо проще решения в инерциальной системе отсчета, связанной с поверхностью Земли.

Рекомендация. Проведите такой опыт в школе и выясните, кто из ваших товарищей сможет сразу объяснить явление, быстро перейдя в «страшную» неинерциальную систему отсчета, движущуюся с ускорением свободного падения. Если такие ребята обнаружатся, значит, дела с физикой в вашей школе обстоят нормально.